Připomenutí: Integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako

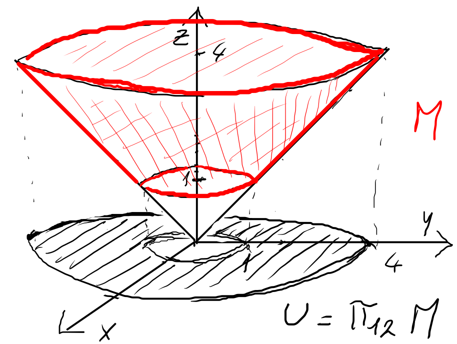
$$\iint_M f\ dS = \iint_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|\ dS\ ,$$

Dú 9

$g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

5 Spočítejte $\iint_M (10-z)\ dS$, kde $M = \{(x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2}, 1 \le z \le 4\}$.

Řešení:



$M: \ \phi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2}) \quad (x,y) \in U = \{(x,y): 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 4\}$

$\phi_x = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$\phi_y = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$\phi_x \times \phi_y = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$

$\|\phi_x \times \phi_y\| = \sqrt{2}$

pol. sou. $x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

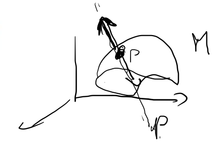
$x^2+y^2 = \rho^2$

$\iint_M (10-z)\,dS = \iint_U (10 - \sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}\ dA =$ polor. sou.

$= \int_0^{2\pi}\int_1^4 (10-\rho)\sqrt{2}\,\rho\ d\rho\, d\varphi =$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, d\varphi \cdot \int_1^4 (10\rho - \rho^2)\,d\rho = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\frac{10\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right]_1^4 = \frac{324}{3}\sqrt{2}\,\pi.$

Připomenutí: Tok vektorového pole $\vec{F}: M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako



$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}(\Phi(u,v))\cdot\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\times\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dA\,,$$

kde $\Phi: U \to M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

$g(x,z) = x^2+z^2$

6 Spočítejte $\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S}$ kde $\vec{F}(x,y,z) = (0,y,-z)$ a M je část paraboloidu $y = x^2+z^2$ pro $y \le 1$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím do leva ($y \le 0$).

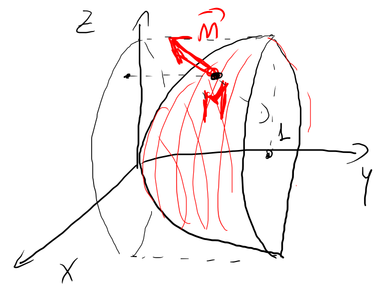
$\cancel{\int \sin^2\varphi = \frac{\sin^3\varphi}{3}}$

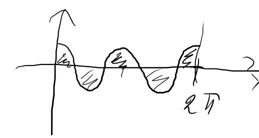
$M: \Phi(x,z) = (x, x^2+z^2, z) \qquad (x,z)\in D$

$\Phi_x = (1, 2x, 0)$ (e_1, e_2, e_3)

$\Phi_z = (0, 2z, 1)$

$\Phi_x \times \Phi_z = (2x, -1, 2z)$ op. orie.





$\pi_{13} M = D$

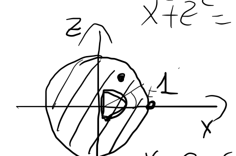
$$\iint_M \vec{F}\,dS = \iint_D (0, x^2+z^2, -z)\cdot(2x,-1,2z)\,dA$$

$$= \iint_D \left(-(x^2+z^2) - 2z^2\right) dA \overset{\text{polo}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-\rho^2 - 2\rho^2\sin^2\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[-\rho^3 - 2\rho^3\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{\cos 2\varphi}{2}}\right)\right] d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2\rho^3\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{2\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\pi$$

$x^2+z^2 = \rho^2$



$x = \rho\cos\varphi$

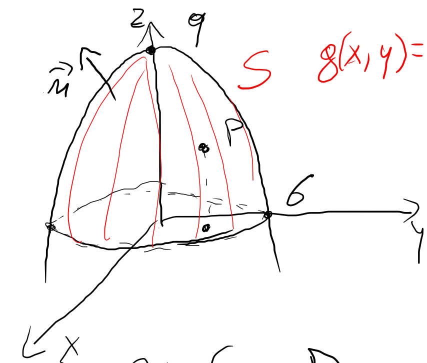
$z = \rho\sin\varphi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \rho \le 1$

7 Kapalina s hustotou 1 protéká s rychlostí danou polem $\vec{v}(x,y,z) = (y,\ 1,\ z)$. Určete průtok kapaliny směrem vzhůru plochou S, která je částí paraboloidu $z = 9 - \frac{(x^2+y^2)}{4}$ pro $x^2+y^2 \le 36$ (neboli určete $\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$).

$z \geq 0$



$S \quad g(x,y) = 9 - \frac{x^2+y^2}{4}$

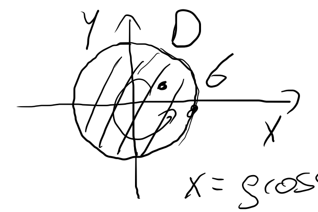
$S: \ \phi(x,y) = \left(x,\ y,\ 9 - \frac{x^2+y^2}{4}\right), \quad (x,y)\in D$

$\phi_x = (1,\ 0,\ -\frac{x}{2})$ (e_1, e_2, e_3)

$\phi_y = (0,\ 1,\ \frac{-y}{2})$

$\phi_x \times \phi_y = \left(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2},\ 1\right) = \vec{n}$

$\pi_{12} S = D$



$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$0 \le \rho \le 6$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\iint_S \vec{v}\, d\vec{S} = \iint_D \left(y,\ 1,\ 9 - \frac{x^2+y^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2},\ 1\right) dA =$$

$$= \iint_D \left(\frac{xy}{2} + \frac{y}{2} + 9 - \frac{x^2+y^2}{4}\right) dA \overset{\text{pdr.}}{=}$$

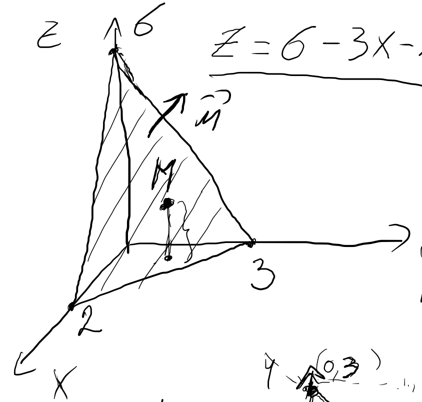
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^6 \left(\underbrace{\cancel{\frac{\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{2}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\rho\sin\varphi}{2}}}_{0} + 9 - \frac{\rho^2}{4}\right)\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^6 \left(9\rho - \frac{\rho^3}{4}\right) d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi \cdot \int_0^6 \left(9\rho - \frac{\rho^3}{4}\right) d\rho$$

$$= 2\pi\left[9\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{16}\right]_0^6 = 2\pi\left[9\cdot\frac{6^2}{2} - \frac{6^4}{16}\right].$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

8 Spočítejte $\iint\limits_M \vec{F}\cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F}(x,y,z) = (x, xy, xz)$, a M je část roviny $3x+2y+z=6$, která leží v prvním oktantu a je orientovaná směrem vzhůru. $z \geq 0$



$z = 6-3x-2y$

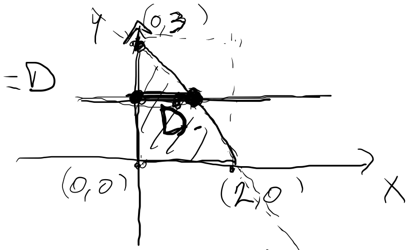
$M:\ \Phi(x,y) = (x, y, 6-3x-2y),\ (x,y)\in D$

$\Phi_x = (1, 0, -3)$

$\Phi_y = (0, 1, -2)$

$\Phi_x \times \Phi_y = (3, 2, \underset{\geq 0}{\underset{\uparrow}{1}}) = \vec{n}$

$\pi_{12} M = D$



$$\iint_M \vec{F}\, dS = \iint_D \langle x, xy, x(6-3x-2y)\rangle \cdot \langle 3,2,1\rangle \, dA =$$

$$= \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} (\underbrace{3x + \cancel{2xy} + 6x - 3x^2}_{9x-3x^2} - \cancel{2xy})\, dx\, dy =$$

$du = -2dy$

$u = 6-2y$

$0 = 6-3x-2y$

$x = \frac{6-2y}{3}$

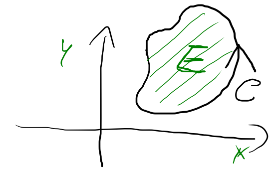
$$= \int_0^3 \left[9\frac{x^2}{2} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} \right]_0^{\frac{6-2y}{3}} dy = \int_0^3 \left[\frac{\cancel{9}}{2}\frac{(6-2y)^2}{\cancel{9}} - \frac{(6-2y)^3}{81} \right] dy =$$

$$= \left[\frac{(6-2y)^3}{3(-4)} - \frac{(6-2y)^4}{4\cdot 81\cdot(-2)} \right]_0^3 = \dots\dots$$

Greenova věta

Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, která je omezená, a nechť její hranice ∂E je tvořena jednoduchou uzavřenou křivkou $\mathcal{C}$. Nechť orientace křivky $\mathcal{C}$ je taková, že při jejím procházení máme v daném místě oblast E vždy po levé straně.

Podle **Greenovy věty** pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme



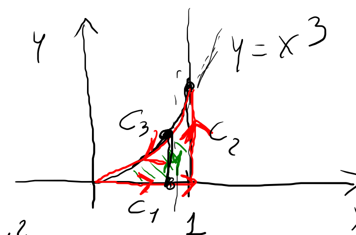
$$\int_{\mathcal{C}=\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír"na okraji oblasti.

$\int_C \vec{F} d\vec{s}$

1 Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x, y) = (2xy^3,\ 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

$$\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} ds + \int_{C_2} \vec{F} ds + \int_{C_3} \vec{F} ds \qquad C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$



$$F_1 = 2xy^3 \qquad F_2 = 4x^2y^2 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

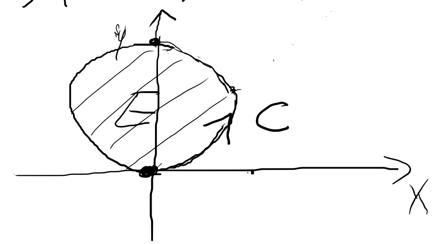
$$\int_C \vec{F} d\vec{s} \overset{\text{GREEN}}{=} \iint_M 2xy^2\, dA = \int_0^1 \int_0^{x^3} 2xy^2\, dy\, dx = \int_0^1 2x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^3} dx =$$

$$= \int_0^1 2x \cdot \frac{x^9}{3} dx = \frac{2}{3} \frac{x^{11}}{11} = \frac{2}{33}$$

2 Pomocí Greenovy věty spočítejte plochu v $\mathbb{R}^2$ omezenou $\varphi(t) = (\sin 2t, \sin t)$ pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

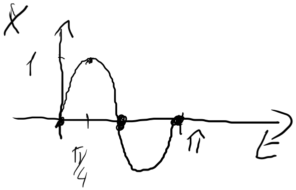
$$\int_C \vec{F}\, ds = \iint_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

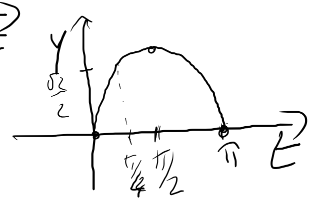
$\varphi'(t) = (2\cos 2t, \cos t)$



$$P \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$0 \le t \le \pi$





$$\text{Obsoh}(E) = \iint_E 1\, dA \qquad \underline{\vec{F} = (0, x)} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$$

$$\int_C \vec{F}\, ds = \int_0^{\pi} (0, \sin 2t) \cdot (2\cos 2t, \cos t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos t \underbrace{\sin 2t}_{2\sin t \cos t}\, dt =$$

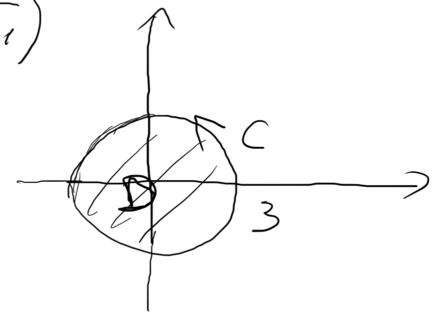
$$= \int_0^{\pi} 2 \sin t \cos^2 t\, dt = -2 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{3}(-1-1) = \frac{4}{3}$$

$\cos t = u$

$-\sin t\, dt = du$

3 Pomocí Greenovy věty spočítejte $\int\limits_{\mathcal{C}} \underbrace{(3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\,dy}$ kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s}\,, \quad \vec{F} = (\underbrace{3y - e^{\sin x}}_{F_1}, \underbrace{7x + \sqrt{y^4+1}}_{F_2})$$



$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA =$$

$$= \iint_D (7 - 3)\, dA = 4 \iint_D dA = 4\ \text{Obsah}(D) = 4 \cdot 9\pi = 36\pi$$

Připomenutí: Práce síly $\vec{F}$ v *oblasti* U (tj. otevřené množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál (pole je konzervativní), tj. existuje funkce $f : U \to \mathbb{R}$, že $\mathrm{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s} \qquad \int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = \int_A^B \mathrm{grad}(f)\, d\vec{s} = f(B) - f(A)\,.$$

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "přímka" nebo torus (tj. "pneumatika").

Dokažte, že následující pole je konzervativní, najděte jeho potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B.

$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y, \quad y^2 + x, \quad ze^z)$, $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 0)$.

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y & y^2+x & ze^z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(ze^z) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2+x),\ -\left(\frac{\partial}{\partial x}(ze^z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y)\right),\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2+x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y) \right)$$

$$1 - 1$$

$$= (0, 0, 0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} \text{ je ka.}$$

f je t. ž. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = F_1 = x^2 + y$ $\qquad f = \int (x^2+y)\,dx = \dfrac{x^3}{3} + yx + g(y,z)$ (2) $\qquad x + \dfrac{\partial g}{\partial y} = y^2 + x \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = y^2$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = F_2 = y^2 + x$ $\qquad g(y,z) = \int y^2\,dy = \dfrac{y^3}{3} + h(z)$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial z} = F_3 = ze^z$ $\qquad f = \dfrac{x^3}{3} + yx + \dfrac{y^3}{3} + h(z)$ (3) $\qquad h'(z) = ze^z$ $\qquad h(z) = \int ze^z\,dz \begin{vmatrix} z & e^z \\ 1 & e^z \end{vmatrix}$

$$= ze^z - e^z + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f = \frac{x^3}{3} + yx + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int_C \vec{F}\, ds = \left[\frac{x^3}{3} + yx + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z\right]_{(0,1,0)}^{(-1,1,0)} = f(-1,1,0) - f(0,1,0) = \ldots\ldots$$